

# 悬链线方程的求解及其应用<sup>\*</sup>

胡灵斌 (上海三航工程船舶公司 上海 200032)

唐 军 (上海船舶研究设计院 上海 200032)

[关键词] 悬链线; 方程

[摘 要] 本文结合实例介绍了悬链线方程的求解方法及其在船舶设计中的应用。

[中图分类号] U664.4+1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-9855(2004)01-0017-04

## Solemnest and application of catenary's curve equation

Hu Lingbin Tang Jun

**Keywords:** catenary's curve; equation

**Abstract:** Solution and application of catenary's curve equation in ship design is presented in the paper with examples.

### 1 前 言

船舶设计者都知道按舾装数法来确定锚、系泊设备,而对于用抓持力法来确定锚、系泊设备则可能由于其计算的局限性而令广大船舶设计人员感到陌生。然而,如灯船、电站船、起重船等工程船的锚泊设备用抓持力法来确定为好,则悬链线方程的应用是必不可少的;而对于较为复杂的多根锚链泊碇的浮船坞,其外力通过专用程序计算得到后确定其链力也要用到悬链线方程。

### 2 悬链线方程的求解

众所周知,对应图1有以下著名的悬链线方程。

$$y = a \left[ \operatorname{sech} \left( ch \frac{x}{a} - 1 \right) + \operatorname{tga} \cdot sh \frac{x}{a} \right]$$

$$= \frac{R}{w} \left[ \frac{1}{\cos \alpha} \left( \frac{e^{\frac{x+w}{R}} + e^{-\frac{x+w}{R}}}{2} - 1 \right) + \operatorname{tga} \cdot \frac{e^{\frac{x+w}{R}} - e^{-\frac{x+w}{R}}}{2} \right] \quad (1)$$

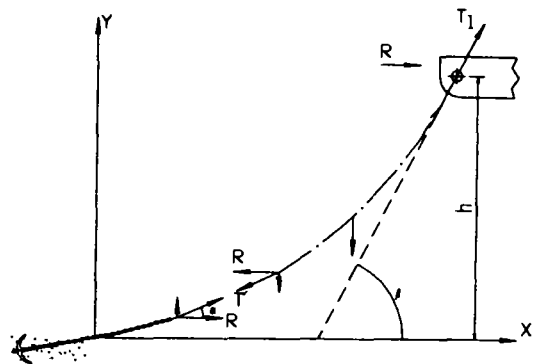


图1 锚泊悬链线

式中  $y$ ——水深,  $m$ ;  
 $R$ ——作用在船上的外力,  $t$ ;  
 $x$ ——锚泊点至挂链点的水平距离,  $m$ ;  
 $\alpha$ ——起锚角,  $^\circ$ ;  
 $w$ ——每米链重,  $t/m$ 。

从以上公式中可以看出  $y$  是  $R, x, \alpha, w$  的函数, 即  $y = f(R, x, \alpha, w)$ 。已知  $R, x, \alpha, w$  就可以求得水深  $y$ 。而实际上船舶抛锚时, 通常设置有足够长度的锚链, 以便有一段躺底锚链, 使锚不产生上拔力, 这样,  $\alpha = 0$ ; 而如果又选定了锚链, 则每米链重  $w$  也为常

\* [收稿日期] 2003-4-29

[作者简介] 胡灵斌(1962-), 男, 工程师, 上海交通大学在读工业工程研究生, 从事船舶研究设计工作。

唐 军(1946.8-), 男, 汉族, 江苏无锡人, 高级工程师, 从事船舶总体设计与研究工作。

里, 入湖个正力让船上的外力  $R$  也已求得, 这样, 公式  $y=f(R, x, \alpha, w)$  就可写成  $y=f_1(x)$ 。但是船在某水域抛锚, 则水深  $y$  反而是已知的。所以以往要从  $y$  来求  $x$ , 显然, 从公式  $y=f_1(x)$  要推导出它的反函数  $x=f_2(y)$  来求  $x$  是很困难的。只能用不同的  $x$  值代入公式(1)去凑  $y$ , 当计算得到的  $y$  恰好等于水深  $h$  时,  $x$  就是我们要求的值。这的确很繁琐, 好在我们现在已处在计算机时代, 我们可以利用 Excel 软件的强大功能或编制某计算程序, 让计算机来完成。求得  $x$  后, 接下来再接以下公式求悬链长。

$$l = a \left[ \operatorname{tga} \left( ch \frac{x}{a} - 1 \right) + \operatorname{seca} \cdot sh \frac{x}{a} \right]$$

$$= \frac{R}{w} \left[ \frac{1}{\operatorname{tga} \left( \frac{e^{\frac{x \cdot w}{R}} + e^{-\frac{x \cdot w}{R}}}{2} - 1 \right)} + \frac{1}{\operatorname{cosa}} \cdot \frac{e^{\frac{x \cdot w}{R}} - e^{-\frac{x \cdot w}{R}}}{2} \right] \quad (2)$$

对于用链索泊碇的浮船坞, 由于受水域限制, 锚不能抛得很远; 而采用沉石, 这就允许有适量的上拔力, 但不能太大, 要求出该上拔力的大小, 这也可以编制另一个程序求解悬链线方程得到。

在浮船坞的链索泊碇工程中碰到的另一个问题是: 有时要求在测定的挂链力  $T$  下, 且已知水深  $y$ , 想要求出使锚不产生上拔力, 锚至少应该抛多远 ( $x=?$ ), 即要求得到  $x=f_3(y, R)$  这一关系式。而  $R$  又是  $T_1$  的水平分力, 显然, 从公式(1)要推导出  $x=f_4(y, T_1)$  也很困难。我们也可以编制某计算程序, 程序框图见图 2(a), 利用计算机每秒钟几千万次的计算速度, 让其按一定规律从较大的水平阻力悬链线方程曲线开始进行迭代计算搜索, 搜索过程见图 2(b), 当搜索到某一点, 这一点的  $y$  恰好等于设定水深  $h$ ,  $T_1$  等于测定的挂链力  $T$ 。这时,  $x$  就是我们要求的最小抛锚距离。同样, 接下来就可以按公式(2)求得悬链长。

### 3 悬链线方程的应用实例一

用抓持方法, 即根据锚及锚索在水底抓住泥土时产生的抓持力与作用在船舶上的外力平衡条件来确定锚及锚索的尺寸。

以某船为例: 船长 97 m, 船宽 15.8 m, 型深 7.7 m, 吃水 3.8 m。

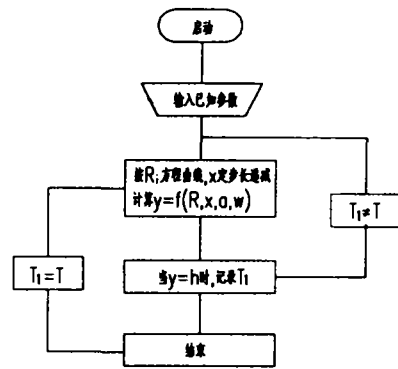
风阻力:

$$R_1 = 0.006 \rho V^2 (F' + 0.31 F) \quad \text{kN}$$

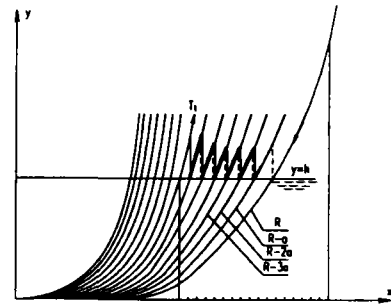
$$= 0.006 \times 0.124 \times 30 (107 + 0.31 \times 61.6)$$

$$= 83.93 \text{ kN}$$

18



(a)



(b)

图 2 搜索计算程序框图

式中  $\rho$ ——空气密度, 为  $0.124 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$

$V$ ——风速, 海船  $V=30 \text{ m/s}$

$F'$ ——上层建筑在舳剖面上的投影面积,

$$F' = 107 \text{ m}^2$$

$F$ ——船体干舷部分在舳剖面上的投影面积,  $F=61.6 \text{ m}^2$

水流阻力:

$$R_2 = 0.01 f \Omega v^{1.83} \quad \text{kN}$$

$$= 0.01 \times 0.18 \times 1500 \times 1.5^{1.83}$$

$$= 5.70 \text{ kN}$$

式中  $f$ ——阻力系数, 取 0.18

$\Omega$ ——船体浸水面积,  $1500 \text{ m}^2$

$v$ ——水流速度, 取  $v=1.5 \text{ m/s}$

波浪漂流阻力:

$$R_3 = \frac{3}{4} k \rho g B \left( \frac{1}{4} H_{1/3} \right)^2 \cos 0^\circ \times 10^{-2} \quad \text{kN}$$

$$= 0.75 \times 0.7 \times 104.61 \times 9.8 \times 15.8$$

$$\times (0.25 \times 1.5)^2 \times 1.0 \times 10^{-2}$$

$$= 11.96 \text{ kN}$$

式中  $K$ ——系数, 0.7

$\rho$ ——水的密度,  $104.61 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^4$

$g$ ——重力加速度  $9.8 \text{ m/s}^2$

$B$ ——船宽 15.8 m

$H_{1/3}$ ——有义波高 1.5 m

外力:

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= 83.93 + 5.70 + 11.96 \\ &= 101.59 \text{ kN} \end{aligned}$$

试取锚链拉力:

$$T_1 = 101.59 \times 1.3 = 132 \text{ kN}$$

试取锚链:

AM<sub>2</sub>-Φ48, 破断力 1 270 kN, 链重 0.0517 t/m

计算抛锚工况:

水深  $h=80 \text{ m}$ ; 设挂链水平力为  $R=101.59 \text{ kN}$ ; 设  $\alpha=0$ ; (抛锚后要求对锚不产生上拔力)。

通过程序进行计算, 并将计算过程汇总于表 1:

表 1

序号	抛锚距离 $x(\text{m})$	按悬链线方程计算得到水深 $y(\text{m})$	按计算得到挂链点拉力 $T_1(\text{kN})$	悬链长 $L(\text{m})$	悬链重 $G(\text{t})$	$\beta$ 角 ( $^\circ$ )	是否满足 $y=h$
1	1 000	27 560	14 330	27 733	1 433	89.64	不满足
2	990	26 006	13 530	26 179	1 353	89.62	不满足
3	980	24 539	12 770	24 711	1 277	89.59	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	160.76	80.03	131	184.80	9.554	46.83	不满足
	160.75	80.02	131	184.79	9.553	46.82	不满足
	160.74 <sub>#</sub>	80.00	130.9 <sub>#</sub>	184.78 <sub>#</sub>	9.553	46.82	满足

注:a)抛锚距离  $x$  为计算值, 初值 1 000 系人为确定, 以后由程序搜索赋值。

b)表中最后一行为计算结果。  $T_1=130.9 \text{ kN}$ ;  $L=184.78 \text{ m}$

校核锚链安全系数:

$$n = 1\ 270 / T_1 = 1\ 270 / 130.9 = 9.7 \text{ (如对该结果}$$

不满意, 可重新选链径, 第二次再算)

选取锚链长:

$L=184.78+45+15=244.78 \text{ m}$  (45 m 为安全附加躺底锚链, 15 m 为锚链舱底到锚链筒口的链长, 实取 245 m)

选取锚重:

$$G = R/5 = 8\ 963/5 = 1\ 793 \text{ kg (取锚的抓重为 5;}$$

实取 2 000 kg 斯贝克锚 2 只为首锚, 备用锚一只)

选取锚机: Φ46~48 电动锚机。

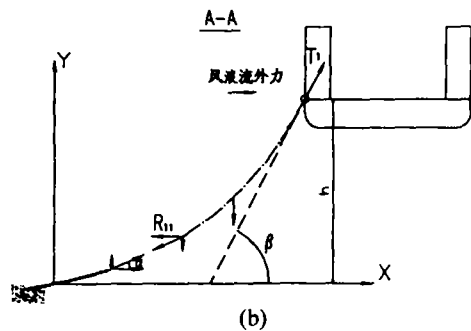
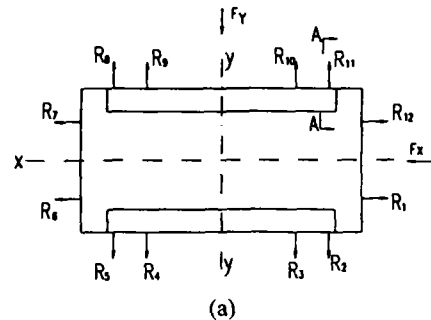


图 3 浮船坞的受力图

#### 4 悬链线方程的应用实例二

以某链索泊碇的浮船坞为例: 坞长 246.4 m, 坞宽 51 m, 坞深 18.45 m, 采用 12 根 U3-Φ81 mm 锚链, 海底桩锚为沉石, 每米链重  $w=0.13 \text{ t}$ , 水深  $h=20.85 \text{ m}$ 。

(1) 已知该浮船坞在某潮位时进行链索预紧, 分配到每根链索的水平力为  $R=372 \text{ kN}$ , 预紧后要求对沉石不产生上拔力。校核悬链张力 (即预紧力  $T_1$ ) 及校核抛锚距离 120 m 是否足够。

解: 设定  $\alpha=0$ ; 通过程序进行计算, 并将计算过程汇总于表 2:

(2) 已知该浮船坞在高潮位台风工况下第 11 根锚泊链分配到的水平阻力  $R=1\ 584.6 \text{ kN}$ , 抛锚距

离  $x=121.06 \text{ m}$ , 允许沉石产生少量上拔力。求:  $\alpha$  角、核算上拔力  $F$  及校核挂链力  $T$ 。

解: 通过程序进行计算, 并将计算过程汇总于表 3:

(3) 已知该浮船坞某锚链的挂链力  $T=1\ 623.5 \text{ kN}$ , 若要求沉石不产生上拔力, 求该链抛锚距离  $x$  的最小值。

册: 以  $\alpha=0$ ; 通过程序进行计算, 并将计算过程汇总于表 4:

表 2

序号	抛锚距离 $x$ (m)	按悬链线方程计算得到水深 $y$ (m)	按计算得到挂链点拉力 $T_1$ (kN)	悬链长 $L$ (m)	悬链重 $G$ (t)	$\beta$ 角 ( $^\circ$ )	是否满足 $y=h$
1-1	1 000	4 430	6 130	4 708	612	86.52	不满足
1-2	990	4 269	5 920	4 546	591	86.39	不满足
1-3	980	4 113	5 710	4 389	570	86.27	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4-7	108.5849	20.85040	399.1055	111.2096	14.45725	21.23793	不满足
5-1	108.5839 <sub>#</sub>	20.85000	399.1048 <sub>#</sub>	111.2086	14.45711	21.23776	满足要求

注:a)抛锚距离  $x$  为计算值, 初值 1 000 系人为确定, 其它由程序搜索赋值。

b)表中最后一行为计算结果, 悬链张力  $T_1=399.1$  kN;  $X=108.5839$  m

表 3

序号	$\alpha$ 角 ( $^\circ$ )	按悬链线方程计算得到水深 $y$ (m)	按计算得到挂链点拉力 $T_1$ (kN)	悬链长 $L$ (m)	悬链重 $G$ (t)	$\beta$ 角 ( $^\circ$ )	上拔力 $F_1$ (kN)	是否满足 $y=h$
1	44	125	2 360	174	22.9	47.9	1 530	不满足
2	43	121	2 320	171	22.2	47	1 470	不满足
3	42	117	2 280	168	21.9	46	1 420	不满足
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	6.9540	20.851	1 623.450	122.8916	15.9759	12.5597	193.273	不满足
	6.9539	20.8508	1 623.449	122.8915	15.9759	15.5596	193.270	不满足
	6.9538	20.8506	1 623.448	122.8915	15.9759	15.5595	193.267	不满足
	6.9537 <sub>#</sub>	20.8500	1 623.448 <sub>#</sub>	122.8915	15.9759	15.5595	193.264 <sub>#</sub>	满足要求

注:a) $\alpha$  为计算值, 初值 44 系人为确定, 其它由程序搜索赋值。

b)表中最后一行为计算结果。上拔力  $F=193.26$  kN; 挂链力  $T=1 623.448$  kN。

表 4

序号	水平分力 $R$ (kN)	抛锚距离 $x$ (m)	按悬链线方程计算得到水深 $y$ (m)	按计算得到挂链点拉力 $T_1$ (kN)	悬链长 $L$ (m)	悬链重 $G$ (t)	$\beta$ 角 ( $^\circ$ )	是否满足 $y=h$ 且 $T_1=T$
1	1 621.5	1 000	422	2 170	1 110	144	41.6	不满足
2	1 621.5	990	413	2 150	1 097	142	41.3	不满足
3	1 621.5	980	405	2 140	1 083	140	40.9	不满足
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	1 596.4	255.9721	20.85003	1 623.504	227.2496	29.54245	10.48437	不满足
	1 596.4	255.9720	20.85003	1 623.502	227.2495	29.54243	10.48439	不满足
	1 596.4 <sub>#</sub>	255.9719 <sub>#</sub>	20.85000	1 623.500	227.2494	29.54242	10.48439	满足要求

注:a) $R$  初值取  $(T-2.0)$ ,  $x$  初值取 1 000, 系人为确定, 以后由程序搜索赋值。

b)表中最后一行为计算结果。

## 5 结束语

目前, 风、水流对于船体的阻力计算公式各门派基本大同小异, 而波浪冲击力和摇摆惯性力迄今尚难以精确计算, 仅“大力号”波浪漂流阻力采用以下公式计算:  $R_x = \frac{3}{4} k \rho g B (\frac{1}{4} H_{1/3})^2 \cos(\alpha_x)$ 。另一个困扰我们的问题是: 对于多根链索泊碇的浮船坞, 各链索的水平力分配较为复杂。因为船体在受到风、流、

波以及惯性力作用以后, 由于系泊链索是一种柔性连接, 故必定使船体发生位移, 从而又改变了与位移量有关的各链索上张力的分布。这就无法从“外力与系泊力平衡”方程中一次求解, 而要通过逐次迭代的过程来求解。用手算显然很困难, 这在本文中都没有解决, 有待进一步研究。∞

### [参考资料]

- [1] “大力号” MOORING CALCULATION [J], IHI, 1980